Estatística II

Licenciatura em Gestão do Desporto

2.º Ano/2.º Semestre

2023/2024

Aulas Teórico-Práticas N.^{os} 15 e 16 (Semana 9)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 1 a 5)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 5 a 7)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 7 a 9)	Aulas Teórico-Práticas (Semanas 10 a 13)
• **Capítulo 1**: Revisões e Distribuições de Amostragem	• **Capítulo 2**: Estimação	• **Capítulo 3**: Testes de Hipóteses	• **Capítulo 4**: Modelo de Regressão Linear Múltipla

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

1

Intervalo de Confiança para a Diferença de Valores Médios μ_1-μ_2

Intervalo de Confiança para μ_1-μ_2: Variâncias Conhecidas

Portanto, quando as populações são Normais com variâncias conhecidas, o **I. C. para $\mu_1 - \mu_2$ com $100(1-\alpha)\%$ de confiança** é dado por:

$$\left]\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}};\ \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}.\right[$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Intervalo de Confiança para μ_1-μ_2: Variâncias Desconhecidas e Iguais

Portanto, quando as populações são Normais com variâncias desconhecidas, mas iguais, o **I. C. para $\mu_1 - \mu_2$ com $100(1-\alpha)\%$ de confiança** é dado por:

$$\left]\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - t_{n_1+n_2-2\,;\,1-\frac{\alpha}{2}} S^* \,;\, \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) + t_{n_1+n_2-2\,;\,1-\frac{\alpha}{2}} S^* \right[.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

$$S^* = \sqrt{\frac{(n_1-1)S1'^2 + (n_2-1)S2'^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

Variâncias corrigidas

$$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Intervalo de Confiança para μ_1-μ_2: Variâncias Desconhecidas e Diferentes

Portanto, quando as populações são Normais com variâncias desconhecidas, , o **I. C. para $\mu_1 - \mu_2$ com $100(1-\alpha)\%$ de confiança** é dado por:

$$\left]\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - t_{v;\,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S1'^2}{n_1} + \frac{S2'^2}{n_2}};\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + t_{v;\,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S1'^2}{n_1} + \frac{S2'^2}{n_2}}\right[.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Variâncias corrigidas

$$v = \left[\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}\right].$$

Variâncias corrigidas

$$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Intervalo de Confiança para μ_1-μ_2 e n ≥ 30: Variâncias Conhecidas e Desconhecidas

- **Parâmetro:** $\mu_1 - \mu_2$
  (populações quaisquer independentes com variâncias finitas)

V. F.

Variâncias Conhecidas

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

ou

Variâncias Desconhecidas

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1'^2}{m} + \frac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1).$$

I. C.

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\alpha/2}\sigma^*, \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{\alpha/2}\sigma^*)$$

ou

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\alpha/2}s^*, \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{\alpha/2}s^*),$$

com $\sigma^* = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$ $\qquad$ $s^* = \sqrt{\frac{s_1'^2}{m} + \frac{s_2'^2}{n}}$

e $z_{\alpha/2}$ a verificar $\Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.

Murteira et al (2015)

IC para μ_1-μ_2: Formulário

Variância corrigida

$$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- **POPULAÇÕES NORMAIS**

Média	$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\frac{\bar{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
Diferença de médias	$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$ Variâncias Conhecidas $T = \frac{\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1'^2+(n-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$	$Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1'^2}{m}+\frac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} t(\nu)$ onde ν é o maior inteiro contido em r, $r = \frac{\left(\frac{s_1'^2}{m}+\frac{s_2'^2}{n}\right)^2}{\frac{1}{m-1}\left(\frac{s_1'^2}{m}\right)^2+\frac{1}{n-1}\left(\frac{s_2'^2}{n}\right)^2}$
Variância	$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	
Relação de variâncias	$\frac{S_1'^2}{S_2'^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1,n-1)$	

Variâncias Desconhecidas e Iguais

Variâncias Desconhecidas e Diferentes

IC para μ_1-μ_2: Formulário

- **GRANDES AMOSTRAS**

Caso geral

Média	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
Diferença de médias	$\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$\dfrac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1'^2}{m}+\dfrac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Variâncias Conhecidas

Variâncias Desconhecidas

Intervalo de Confiança para a Diferença de Valores Médios μ_1-μ_2: Exercícios

2

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

Havendo indícios de que o esquema de avaliação e as classificações finais atribuídas diferem fortemente entre duas escolas, decidiu-se comprovar estatisticamente esta hipótese. Os desvios-padrão são conhecidos sendo 2,1 valores na escola A e 1,8 valores na escola B. Assim, retirou-se uma amostra de testes de alunos em cada uma das escolas que levaram aos seguintes resultados:

Escola	n_i	$\overline{x}_i$
A	41	12,9
B	31	14,7

Recorrendo a um intervalo de confiança a 90%, diga se há diferenças entre as classificações médias das escolas A e B. Justifique.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício: IC para μ_1-μ_2 (Variâncias Conhecidas)

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa a classificação final dos alunos na escola A,
- X_2 a v.a. que representa a classificação final dos alunos na escola B,

com $\sigma_1 = 2{,}1$ e $\sigma_2 = 1{,}8$.

Como as amostras são grandes, o I. C. para $\mu_1 - \mu_2$ a 90% é dado por:

$$\left](\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - z_{0,95}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}};(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + z_{0,95}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right[.$$

Substituindo pelos valores conhecidos, sendo $z_{0,95} = 1{,}645$, obtém-se

$$\left](12{,}9 - 14{,}7) \pm 1{,}645\sqrt{\frac{2,1^2}{41} + \frac{1,8^2}{31}}\right[=]-2{,}558;\ -1{,}043[.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Com 90% de confiança, existe evidência de que as classificações médias são diferentes (0 não está no intervalo). Como ambos os limites do intervalo são negativos então significa que $\mu_1 < \mu_2$, ou seja, a classificação média é superior na escola B do que na escola A[†].

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

Um determinado método de análise permite determinar o conteúdo de enxofre no petróleo bruto. Os ensaios efetuados em 10 e 8 amostras aleatórias de 1 kg de petróleo bruto, provenientes de furos pertencentes respetivamente aos campos A e B, revelaram os seguintes resultados (em gramas):

Campo A:	111	114	105	112	107	109	112	110	110	106
Campo B:	109	103	101	105	106	108	110	104		

Construa um intervalo de confiança a 90% para a diferença entre os valores esperados da quantidade de enxofre por quilograma de petróleo proveniente de cada campo, considerando que populações são Normais, com variâncias desconhecidas mas iguais.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício: IC para μ_1-μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo A,
- X_2 a v.a. que representa a quantidade de enxofre por quilograma de petróleo do campo B,

com $X_1 \sim N(\mu_1 = ?\,; \sigma_1 = ?\,)$ e $X_2 \sim N(\mu_2 = ?; \sigma_2 = ?\,)$, mas $\sigma_1 = \sigma_2$.

$n_1 = 10, \quad \bar{x}_1 = 109{,}6 \quad \text{e} \quad s_1 = 2{,}875,$

$n_2 = 8, \quad \bar{x}_2 = 105{,}75 \quad \text{e} \quad s_2 = 3{,}105.$

O I. C. para $\mu_1 - \mu_2$ a 90% é dado por:

$$\left]\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - t_{n_1+n_2-2;\,0{,}95} S^*\,;\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) + t_{n_1+n_2-2;\,0{,}95} S^*\right[,$$

$$\text{com } S^* = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Variâncias corrigidas

$$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Exercício: IC para μ_1-μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Iguais)

Substituindo pelos valores conhecidos,

$$s^* = \sqrt{\frac{(10-1)2{,}875^2 + (8-1)3{,}105^2}{10+8-2}}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}} = 1{,}413$$

e como $t_{16\,;\,0{,}95} = 1{,}746$, obtém-se

$$](109{,}6 - 105{,}75) \pm 1{,}746 \times 1{,}413;\,[\ = \ ]1{,}384;\ 6{,}316[.$$

Com 90% de confiança, existe evidência de que o teor médio de enxofre nos campos A e B é diferente (0 não está no intervalo). Uma vez que ambos os limites são positivos, então significa que $\mu_1 > \mu_2$, ou seja, o conteúdo médio de enxofre por quilograma de petróleo extraído do campo A é superior ao registado no campo B[†].

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

Para um estudo sobre a caracterização da altura da população portuguesa, foi recolhida uma amostra de 1861 pessoas, com as seguintes características:

Group Statistics

	Sexo	N	Mean	Std. Deviation
Altura	Masculino	853	168,46	7,617
	Feminino	1007	158,48	6,652

Supondo a normalidade das distribuições e assumindo que as variâncias populacionais são desconhecidas e diferentes, verifique se se pode considerar que as alturas médias dos homens e das mulheres são iguais, com 95% de confiança.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício: IC para μ_1-μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa a altura dos indivíduos do sexo masculino,
- X_2 a v.a. que representa a altura dos indivíduos do sexo feminino,

com $X_1 \sim N(\mu_1 =?\,; \sigma_1 =?)$ e $X_2 \sim N(\mu_2 = ?; \sigma_2 =?)$, mas $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

$n_1 = 853, \quad \overline{x}_1 = 168{,}46 \quad$ e $\quad s_1 = 7{,}617,$
$n_2 = 1007, \quad \overline{x}_2 = 158{,}48 \quad$ e $\quad s_2 = 6{,}652.$

O I. C. para $\mu_1 - \mu_2$ a 95% é dado por:

$$\left](\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{v;\,0{,}975}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}};(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t_{v;\,0{,}975}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right[$$

Variâncias corrigidas

$$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

com $v = \left[\dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{1}{n_1-1}\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \dfrac{1}{n_2-1}\left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}\right].$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício: IC para μ_1-μ_2 (Variâncias Desconhecidas e Diferentes)

Substituindo pelos valores conhecidos,

$$v = \left[\frac{\left(\frac{7{,}617^2}{853} + \frac{6{,}652^2}{1007} \right)^2}{\frac{1}{853-1}\left(\frac{7{,}617^2}{853} \right)^2 + \frac{1}{1007-1}\left(\frac{6{,}652^2}{1007} \right)^2} \right] = [1705{,}6] = 1705,$$

e como $t_{1705;\, 0{,}975} = 1{,}96$, obtém-se

$$\left] (168{,}46 - 158{,}48) \pm 1{,}96 \sqrt{\frac{7{,}617^2}{853} + \frac{6{,}652^2}{1007}} \right[=]9{,}32;\ 10{,}64[.$$

Com 90% de confiança, existe diferença significativa entre as médias das alturas dos homens e das mulheres (0 não está contido do I. C. a 95%). Como ambos os limites do intervalo são positivos então significa que $\mu_H > \mu_M$, ou seja, a altura média dos homens é superior à altura média das mulheres.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Intervalo de Confiança para a Relação de Variâncias σ_1^2/σ_2^2

3

Intervalo de Confiança para σ_1^2/σ_2^2

Quando as populações são Normais, o **I. C. para** $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ **com** $\mathbf{100(1-\alpha)\%}$ **de confiança** é dado por:

$$\left]\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,1-\frac{\alpha}{2}}};\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,\frac{\alpha}{2}}}\right[.$$

Variável Fulcral

$$\frac{S_1'^2}{S_2'^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\sim F(m-1,n-1)$$

Como $F_{n_1-1,n_2-1;\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{F_{n_2-1,n_1-1;1-\frac{\alpha}{2}}}$ este intervalo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\left]\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1;1-\frac{\alpha}{2}}};\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{n_2-1,n_1-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right[.$$

Variâncias corrigidas

$$S'^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

IC para σ_1^2/σ_2^2: Formulário

- **POPULAÇÕES NORMAIS**

Média	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
Diferença de médias	$\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$ $T=\dfrac{\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1'^2+(n-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$	$Z=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1'^2}{m}+\dfrac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} t(\nu)$ onde ν é o maior inteiro contido em r, $r=\dfrac{\left(\dfrac{s_1'^2}{m}+\dfrac{s_2'^2}{n}\right)^2}{\dfrac{1}{m-1}\left(\dfrac{s_1'^2}{m}\right)^2+\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{s_2'^2}{n}\right)^2}$
Variância	$\dfrac{nS^2}{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	
Relação de variâncias	$\dfrac{S_1'^2}{S_2'^2}\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1,n-1)$	

Variâncias corrigidas

$$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

Intervalo de Confiança para a Relação de Variâncias σ_1^2/σ_2^2: Exercícios

4

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

Para substituir uma máquina antiquada encaram-se 2 alternativas: o equipamento A ou equipamento B. Dado tratar-se de uma decisão que envolve custos consideráveis uma vez que os equipamentos são bastante dispendiosos, resolveu-se testar os dois equipamentos durante um período experimental.

No final do período experimental selecionaram-se 31 e 61 peças da produção dos equipamentos A e B, respetivamente, tendo-se registado os seguintes valores relativamente à característica de interesse na avaliação da qualidade do trabalho das máquinas:

$$\sum_{i=1}^{31} x_{iA} = 43{,}4; \qquad \sum_{1=1}^{31} x_{iA}^2 = 123{,}76; \qquad \sum_{i=1}^{61} x_{iB} = 91{,}5; \qquad \sum_{i=1}^{61} x_{iB}^2 = 269{,}25$$

Utilizando um intervalo de confiança a 95% diga se há razões para crer que com a máquina A se consegue uma menor variabilidade da característica de avaliação do que com a máquina B. Admita a normalidade das distribuições.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício: IC para σ_1^2/σ_2^2

Sejam:

- X_1 a v.a. que representa o valor da característica de interesse no equipamento A,
- X_2 a v.a. que representa o valor da característica de interesse no equipamento B,

Com $X_1 \sim N(\mu_1 = ?\,; \sigma_1 = ?\,)$ e $X_2 \sim N(\mu_2 = ?; \sigma_2 = ?\,)$.

$n_1 = 31$ e $n_2 = 61$.

$$\bar{x}_1 = \sum_{i=1}^{31} \frac{x_{1i}}{31} = \frac{43{,}4}{31} = 1{,}4; \qquad s_1^2 = \frac{1}{30}\left(\sum_{i=1}^{31} x_{1i}^2 - 31 \times \bar{x}_1^2\right) = \frac{123{,}76 - 31 \times 1{,}4^2}{30} = 2{,}1;$$

$$\bar{x}_2 = \sum_{i=1}^{61} \frac{x_{2i}}{61} = \frac{91{,}5}{61} = 1{,}5; \qquad s_2^2 = \frac{1}{60}\left(\sum_{i=1}^{61} x_{2i}^2 - 61 \times \bar{x}_2^2\right) = \frac{269{,}25 - 61 \times 1{,}5^2}{60} = 2{,}2.$$

O I. C. a 95% para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ é dado por:

$$\left]\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{n_1-1;n_2-1\,;\,1-\frac{\alpha}{2}}}\,;\frac{S_1^2}{S_2^2}f_{n_2-1;n_1-1\,;\,1-\frac{\alpha}{2}}\right[.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício: IC para σ_1^2/σ_2^2

Tabela da F-Snedcor

$f_{30;\,60;\,0{,}975} = 1{,}82$

$f_{60;\,30;\,0{,}975} = 1{,}94$

$$F_{m,n,\varepsilon} : P(X > F_{m,n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

m – graus de liberdade do numerador; n – graus de liberdade do denominador

n	ε	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
20	.100	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
	.050	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
	.025	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
	.010	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
22	.100	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
	.050	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
	.025	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
	.010	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
24	.100	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
	.050	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
	.025	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
	.010	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
26	.100	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
	.050	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
	.025	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
	.010	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
28	.100	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
	.050	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
	.025	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
	.010	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
30	.100	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
	.050	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
	.025	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
	.010	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	.100	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
	.050	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
	.025	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
	.010	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	.100	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
	.050	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
	.025	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
	.010	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60

Exercício: IC para σ_1^2/σ_2^2

Substituindo pelos valores conhecidos, sendo $f_{30;\,60;\,0{,}975} = 1{,}82$ e $f_{60;\,30;\,0{,}975} = 1{,}94$, obtém-se:

$$\left]\frac{2{,}1}{2{,}2} \times \frac{1}{1{,}82}; \frac{2{,}1}{2{,}2} \times 1{,}94\right[=]0{,}526; 1{,}852[.$$

Com 95% confiança não há razões para crer que exista diferença na variabilidade da característica de avaliação obtida com as duas máquinas (a igualdade das variâncias), uma vez que o valor 1 está presente no intervalo.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

5 Intervalo de Confiança para uma proporção p

Intervalo de Confiança para p

Estimador de p

$$\boxed{\bar{P} = \hat{P}}$$

Variável Fulcral

$$Z = \frac{\bar{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{\circ}{\sim} N(0;1).$$

Portanto, quando a amostra é grande, o **I. C. para p com $100(1-\alpha)\%$ de confiança** é:

$$\left]\bar{P} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}\,;\ \bar{P} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}\right[.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Intervalo de Confiança para uma proporção p: Exercícios

6

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

Numa certa cidade A recolheu-se uma amostra aleatória de 150 homens tendo 54 afirmado que viam o telejornal todos os dias.

a) Com 90% de confiança, será que se pode considerar que a proporção de homens, daquela cidade, que veem o telejornal todos os dias é de 40%.

b) Mantendo-se o resto constante, qual deveria ser a dimensão da amostra de forma a que o erro de estimativa do intervalo de confiança não ultrapasse 5%?

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (a): IC para p

Sejam:

- X_i a v. a. que designa se o i-ésimo homem afirmou ver o telejornal,
- $\overline{P}$ a v. a. que representa a proporção de homens que afirmaram ver o telejornal, em n homens.

$n = 150$ e $\overline{p} = \dfrac{54}{150} = 0{,}36.$

a) Afirmação: $p = 0{,}4$.

I. C. a 90% para p é dado por:

$$\left]\overline{P} - z_{0,95}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}; \overline{P} + z_{0,95}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\right[.$$

Substituindo pelos valores conhecidos, com $z_{0,95} = 1{,}645$, obtém-se

$$\left]0{,}36 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{150}}; 0{,}36 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{150}}\right[=]0{,}3464; 0{,}5077[.$$

Deste modo, face aos resultados obtidos (0,4 está contido do I. C. a 90%) não é de rejeitar a hipótese de que a proporção de homens que vê o telejornal todos os dias é de 40%, pois com 90% de confiança a percentagem de homens que vê diariamente o telejornal situa-se entre 34,64% e 50,77%.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício (b): IC para p

Margem de erro ou Erro de estimativa
é metade da amplitude do IC

b) Erro de estimativa $\leq 0{,}05$, então $n = ?$

O erro de estimativa associado ao I. C. a 90% para p é:

$$z_{0,95}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}},$$

que se pretende que seja inferior ou igual a 0,5. Portanto,

$$z_{0,95}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} \leq 0{,}05 \Leftrightarrow 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{n}} \leq 0{,}05$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1{,}645\sqrt{0{,}36(1-0{,}36)}}{0{,}05} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 15{,}792$$

$$\Rightarrow n \geq 15{,}792^2 \Leftrightarrow n \geq 249{,}4 \Rightarrow n \geq 250$$

Desta forma, a dimensão mínima da amostra que garante que o erro de estimativa do I. C. a 90% é no máximo de 5% é de 250 homens.

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Intervalo de Confiança para a Diferença de Proporções p_1-p_2

7

Intervalo de Confiança para p_1-p_2

Estimadores de p1 e p2

$\overline{P1} = \hat{P}_1$

$\overline{P2} = \hat{P}_2$

Variável Fulcral

$$Z = \frac{(\overline{P}_1 - \overline{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \overset{\circ}{\sim} N(0;1).$$

Portanto, quando as amostras são grandes, o **I. C. para $\boldsymbol{p_1 - p_2}$ com $\boldsymbol{100(1-\alpha)\%}$ de confiança** é dado por:

$$\left]\overline{P}_1 - \overline{P}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}};\ \overline{P}_1 - \overline{P}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}}\right[.$$

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Intervalo de Confiança para a Diferença de Proporções p1-p2: Exercícios

8

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

Numa certa cidade A recolheu-se uma amostra aleatória de 150 homens tendo 54 afirmado que viam o telejornal todos os dias. Numa outra cidade do país, cidade B, 80 dos 200 homens selecionados aleatoriamente responderam afirmativamente.

Com 95% de confiança, será de admitir que a proporção de homens que vê o telejornal todos os dias é igual nas duas cidades?

ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)

Exercício: IC para p_1-p_2

Sejam:

- X_{1i} a v. a. que designa se o i-ésimo homem, da cidade A, afirmou ver o telejornal, $i = 1, \dots, n_1$,
- X_{2i} a v. a. que designa se o i-ésimo homem, da cidade B, afirmou ver o telejornal, $i = 1, \dots, n_2$,
- $\overline{P}_1$ a v. a. que representa a proporção de homens, da cidade A, que afirmaram ver o telejornal, em n_1 homens,
- $\overline{P}_2$ a v. a. que representa a proporção de homens, da cidade B, que afirmaram ver o telejornal, em n_2 homens.

$$n_1 = 150;\ \ \overline{p}_1 = \frac{54}{150} = 0{,}36;\ \ n_2 = 200 \text{ e } \overline{p}_2 = \frac{80}{200} = 0{,}4.$$

O I. C. a 95% para $p_1 - p_2$ é dado por:

$$\left]\overline{P}_1 - \overline{P}_2 - z_{0,975}\sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}}; \overline{P}_1 - \overline{P}_2 + z_{0,975}\sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}}\right[.$$

Substituindo pelos valores conhecidos, sendo $z_{0,975} = 1{,}96$, obtém-se:

$$\left](0{,}36 - 0{,}4) \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}36(1-0{,}36)}{150} + \frac{0{,}4(1-0{,}4)}{200}}\right[=]-0{,}143; 0{,}063[.$$

Portanto, com 95% de probabilidade a diferença entre a percentagem de homens da cidade A e cidade B que veem o telejornal diariamente está entre -14,3% e 6,3%. Como o 0 está contido no intervalo não é de excluir a hipótese de que a percentagem de homens é idêntica nas duas cidades, com a referida confiança.

[ProbabilidadesEstatistica_2019 (uevora.pt)]

9 Inferência Estatística

Definição e Construção de Testes de Hipóteses

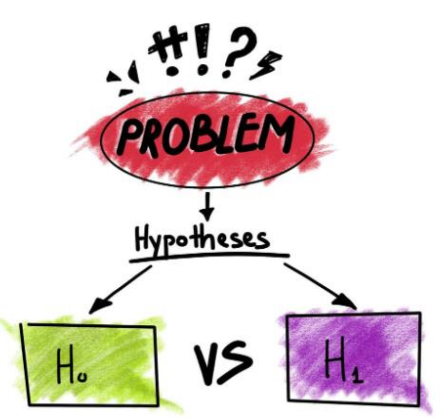
Teste de Hipóteses

✓ Procedimento que conduz a uma tomada de decisão, com base na informação fornecida pelos dados recolhidos, sobre a aceitação ou a não aceitação de determinada hipótese estatística que se coloca sobre uma ou mais populações.

"A **Statistical Test** is a way to evaluate the evidence the data provides against a hypothesis. This hypothesis is called **the null hypothesis** (H0). H0 is usually opposed to a hypothesis called the **alternative hypothesis** (H1).

If the data does not provide enough evidence against H0, H0 is not rejected. If instead, the data shows strong evidence against H0, H0 is rejected and H1 is considered as true with a quantified (low) risk of being wrong.

A **Statistical Test** allows to reject/not to reject H0."



Hipótese é uma afirmação

Em uma certa população as médias de tempo de recuperação dos indíduos que tomam um certo remédio e daqueles que não tomam são iguais

O teste de hipótese é uma pergunta

Será que em uma certa população as médias de tempo de recuperação dos indíduos que tomam um certo remédio e daqueles que não tomam são iguais?

O resultado do teste é uma resposta

Com base na amostra pode-se dizer que
- Não há indícios de diferença estatisticamente significativa no tempo médio de recuperação entre os que tomam e os que não tomam o remédio, ou
- Há indícios de diferença estatisticamente significativa no tempo médio de recuperação entre os que tomam e os que não tomam o remédio

Qual o Teste Estatístico a Usar?

Depende de vários factores:

- Tipo de efeito que se pretende testar
- Nº de variáveis envolvidas
- Nível de medição das variáveis
- Independência das observações
- Outras características dos dados (tipo de distribuição de frequências, igualdade de variâncias, etc)

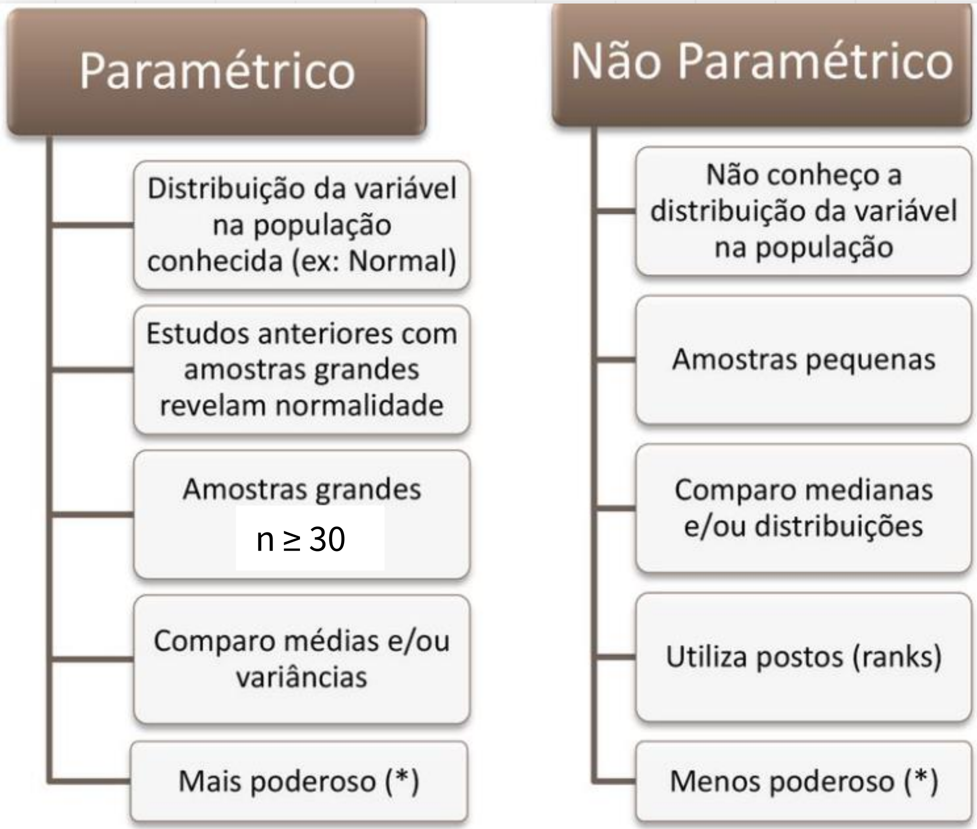
Testes Paramétricos vs Testes Não-Paramétricos

Testes Paramétricos:

- **Fazem pressupostos sobre a distribuição** dos dados:
  - Exigem a normalidade em amostras pequenas ($n < 30$).
  - Nas amostras grandes ($n \geq 30$) como a distribuição da variável média amostral é assintoticamente normal pelo **Teorema do Limite central (TLC)** podem ser aplicados os Testes Paramétricos.
- Dados contínuos.

Testes Não-Paramétricos:

- **Não fazem pressupostos sobre a distribuição** dos dados:
  - São usados quando a(s) variável(is) não tem(têm) distribuição normal ou quando, apesar da(s) amostra(s) ser(em) grande(s), se opta por conclusões mais conservadoras.
- Dados nominais, ordinais, discretos ou contínuos.
- Em geral, envolvem cálculos mais simples.
- Pouco influenciados por valores extremos.
- A desvantagem destes testes é que não são tão potentes quanto os Testes Paramétricos, ou seja, podem levar a uma maior probabilidade do erro tipo II (definido num slide mais à frente).



*) Poder: Habilidade do teste de detectar um efeito dado que ele realmente exista

https://slideplayer.com.br/slide/14561961/

Testes de Hipóteses em Estudo...

Testes Paramétricos

- Testes de hipóteses para um valor médio μ
- Testes de hipóteses para uma variância σ^2
- Testes de hipóteses para uma proporção populacional p
- Testes de Hipóteses para a igualdade de médias (amostras independentes)
- Testes de Hipóteses para a razão de variâncias
- Testes de Hipóteses para a igualdade de proporções
- Testes de Hipóteses para a igualdade de médias (amostras emparelhadas)

Testes Não Paramétricos

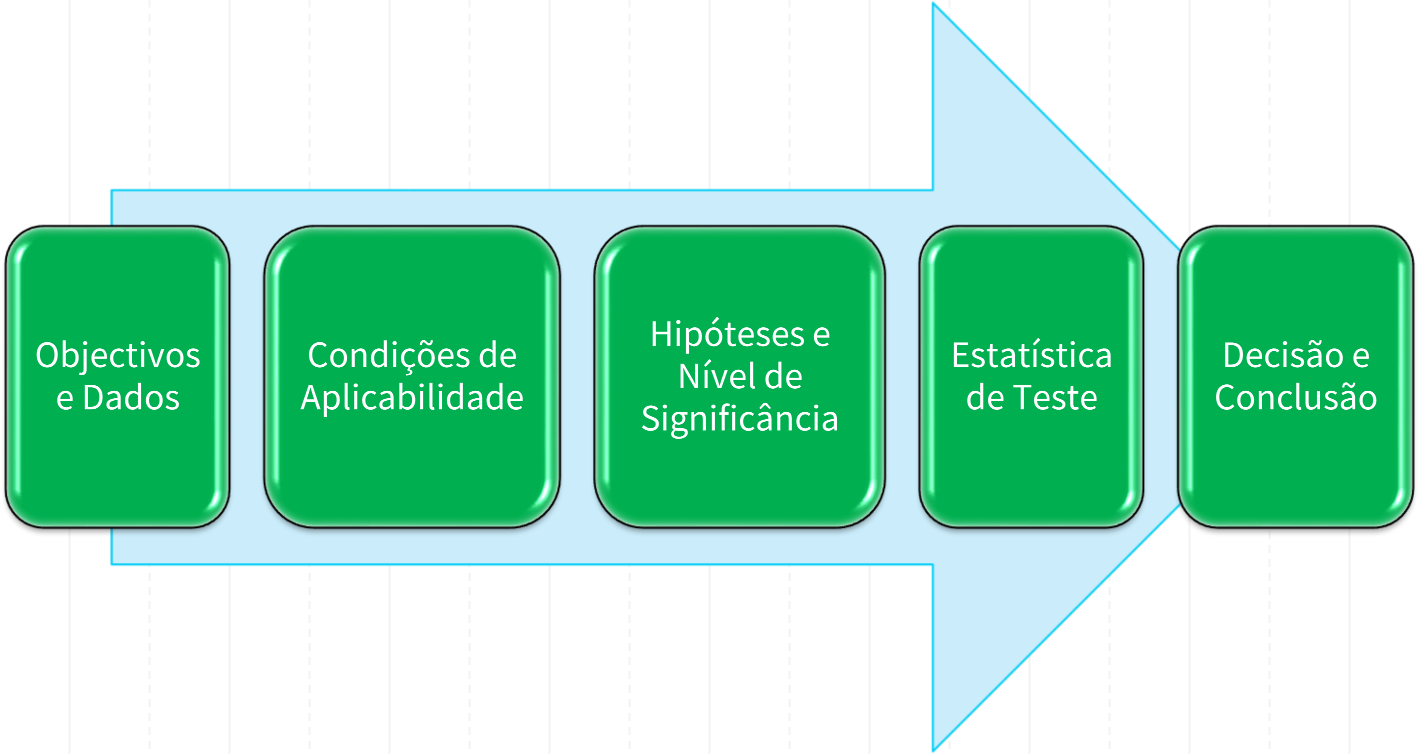
- Teste de Independência do Qui-Quadrado

Condições de Aplicabilidade de Testes Paramétricos

Normalidade

Homogenidade de variâncias

Construção de um Teste de Hipóteses



Tipo de Hipóteses

1) $H_0: \underbrace{\mu = 1{,}70}_{\text{simples}}$ vs. $H_1: \underbrace{\mu = 1{,}80}_{\text{simples}}$

2) $H_0: \underbrace{\mu = 1{,}70}_{\text{simples}}$ vs. $H_1: \underbrace{\mu > 1{,}70}_{\text{composta}}$

3) $H_0: \underbrace{\mu \leq 1{,}70}_{\text{comp.}}$ vs. $H_1: \underbrace{\mu > 1{,}70}_{\text{comp.}}$

4) $H_0: \underbrace{\mu = 1{,}70}_{\text{simples}}$ vs. $H_1: \underbrace{\mu \neq 1{,}70}_{\text{composta}}$

Tipos de Erros vs Nível de Significância

$\alpha = P(\text{erro do tipo I}) =$

$= P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira})$

A α chama-se nível de significância.

$\beta = P(\text{erro do tipo II}) =$

$= P(\text{"Aceitar" } H_0 | H_0 \text{ é falsa})$

Tipos de erros

- Erro tipo I (1ª espécie): rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira
- Erro tipo II (2ª espécie): não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa

Decisão	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Não rejeitar H_0	Correto $1-\alpha$	Erro tipo II β
Rejeitar H_0	Erro tipo I α	Correto $1-\beta$

Poder ou potência do teste

Definição: Chama-se potência do teste à probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando a hipótese alternativa é verdadeira ($= 1 - \beta$).

Nível de significância ($0 \leq \alpha \leq 1$)

- Probabilidade que o investigador estabelece à priori como limite para decidir se rejeita H_0
- Níveis usuais de significância: 0,5%, 1% , 5% e 10%

Decisão: Região de Rejeição vs Valor-p

Nota: Supondo que a estatística de teste tem distribuição normal.

Região de rejeição (RR) ou Região crítica (RC): Conjunto para o qual H_0 é rejeitada

- Teste unilateral à esquerda: RR = $]-\infty; z_\alpha]$
- Teste unilateral à direita: RR = $[z_{1-\alpha}; +\infty[$
- Teste bilateral: RR = $]-\infty; -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}; +\infty[$

$\Leftrightarrow$

Regra (considerando os valores críticos):

- $z_0 \leq z_\alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0
- $z_0 \geq z_{1-\alpha} \Rightarrow$ Rejeita-se H_0
- $|z_0| \geq z_{1-\alpha/2} \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Regra: $z_0 \in RR \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Dimensão do teste

Valor-p ou P-value: Probabilidade sob H_0 de a estatística de teste tomar valores tão ou mais desfavoráveis a H_0 do que o seu valor observado

- Teste unilateral à esquerda: valor-p = $P(Z \leq z_0)$
- Teste unilateral à direita: valor-p = $P(Z \geq z_0)$
- Teste bilateral: valor-p = $P(Z \leq -z_0 \text{ ou } Z \geq z_0) = 2 \times P(Z \geq |z_0|)$

Regra: Valor-p < $\alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

O nível de significância α é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira (conhecido como erro do tipo I).[5] Em testes de hipóteses estatísticas, diz-se que há significância estatística ou que o resultado é estatisticamente significante quando o *p*-valor observado é menor que o nível de significância α definido para o estudo.[2][3] O nível de significância é geralmente determinado pelo pesquisador *antes* da coleta dos dados e é tradicionalmente fixado em 0,05 ou menos, dependendo da área de estudo.[6][7][8] Em muitas áreas de estudo, resultados com nível de significância de 0,05 (probabilidade de erro de 5%) são considerados estatisticamente relevantes.[9][10][11]

O *p*-valor (nível descritivo ou probabilidade de significância) é a probabilidade de se obter uma estatística de teste igual ou mais extrema que a estatística observada a partir de uma amostra aleatória de uma população quando a hipótese nula é verdadeira. Em outras palavras, o *p*-valor é o menor nível de significância para o qual se rejeita a hipótese nula. Por exemplo, a hipótese nula é rejeitada a 5% quando o *p*-valor é menor que 5%.[12]

https://pt.wikipedia.org/wiki/Signific%C3%A2ncia_estat%C3%ADstica

<u>Definição</u>: valor-p é o menor nível de significância a partir do qual H_0 é rejeitada.

Testes de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Hipóteses, Estatística de Teste e Decisão

10

8.4 Da produção diária de determinado fertilizante tiraram-se seis pequenas porções que se analisaram para calcular a percentagem de nitrogénio. Os resultados foram os seguintes:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6.2	5.7	5.8	5.8	6.1	5.9

$\bar{x} = 5.917$

Sabe-se, por experiência, que o processo de análise fornece valores com distribuição que se pode considerar normal com $\sigma^2 = 0.25$.

(a) Suportam as observações a garantia de que a percentagem esperada de nitrogénio, μ, é igual a 6% ao nível de significância de 10%?

(b) Responda à alínea anterior usando o valor-p.

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Passo 0 [descrição da situação]

X = % de nitrogénio num fertilizante $\sim \mathcal{N}(\mu, 0.25)$
(população normal, de valor esperado desconhecido e de variância conhecida)

amostra de dimensão 6; $\bar{x} = 5.917$

A não esquecer: $\bar{X}$ não é a mesma coisa que $E[X]$
S^2 " " " " " $Var(X)$

$E(X) = \mu$
$Var(X) = \sigma^2$

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Hipóteses:

Passo 1 : indicar quais as hipóteses que vamos testar e qual a significância

[nula] $H_0: \mu = 6$ [lê-se: vamos testar a hipótese H_0 i.e., se $\mu = 6$]

[alternativa] $H_1: \mu \neq 6$ [lê-se: em alternativa, vamos decidir se $\mu \neq 6$]

Tipos de Testes de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

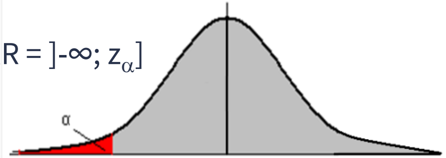
Um **teste de hipóteses paramétrico** para o parâmetro μ (valor médio ou média populacional) pode ser:

Teste

- Bilateral
  - $H_0: \mu = \mu_0$
  - $H_1: \mu \neq \mu_0$
  - RR = $]-\infty; -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}; +\infty[$

- Unilateral
  - à direita
    - $H_0: \mu \leq \mu_0$
    - $H_1: \mu > \mu_0$
    - RR = $[z_{1-\alpha}; +\infty[$

  - à esquerda
    - $H_0: \mu \geq \mu_0$
    - $H_1: \mu < \mu_0$
    - RR = $]-\infty; z_{\alpha}]$



onde μ_0 é o valor numérico específico considerado em H_0 e H_1.

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Estatística de Teste:

Passo 2: Escolha da v. fulcral e consequente estatística de teste.

Regras para escolha da v. fulcral no cap. 7:

I.C. p/ μ, σ conhecido, $X \sim N(\mu,\sigma^2)$	I.C. p/ μ, σ desconhecido, $X \sim N(\mu,\sigma^2)$	idem, n grande	
$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$ ①	$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$
$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ ②		$\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\sim} \chi^2_{(k-m-1)}$	

$= \left(\frac{1}{n-1}\sum x_i^2\right) - \left(-\frac{n}{n-1}\bar{x}^2\right)$

I.C. p/ σ, com μ desconhecido $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

IC para μ: Formulário

- **POPULAÇÕES NORMAIS**

Média	$\boxed{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
Diferença de médias	$\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$	$Z=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1'^2}{m}+\dfrac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} t(\nu)$ onde ν é o maior inteiro contido em r, $r=\dfrac{\left(\dfrac{s_1'^2}{m}+\dfrac{s_2'^2}{n}\right)^2}{\dfrac{1}{m-1}\left(\dfrac{s_1'^2}{m}\right)^2+\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{s_2'^2}{n}\right)^2}$
	$T=\dfrac{\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1'^2+(n-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$	
Variância	$\dfrac{nS^2}{\sigma^2}=\dfrac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	
Relação de variâncias	$\dfrac{S_1'^2}{S_2'^2}\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1,n-1)$	

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Estatística de Teste:

No presente exemplo, estamos a construir um teste de hipóteses para o valor esperado de uma população normal de variância conhecida.

$$V.F. = Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$Est.\ Teste = Z_0 = \frac{\bar{X} - 6}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

(i.e., a estatística de teste é a variável fulcral,

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Estatística de Teste:

depois de substituido o parâmetro em teste pelo valor que consta em H_0)

$H_0: \mu = 6$

valor observado: $z_0 = \dfrac{5.917 - 6}{\sqrt{0.25}/\sqrt{6}} = -0.41$ ~~$\sim N(0,1)$~~

n (dimensão da amostra)

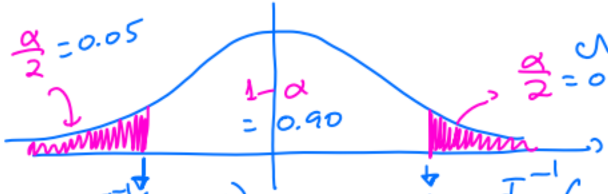
[Passo 2: dist. de X + H_0 + saber quais os parâmetros conhecidos]

Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Decisão (pela região de rejeição):

Passo 3 : Construção da Região de Rejeição



$-1.65 = a = \Phi^{-1}(0.05)$ $\qquad$ $b = \Phi^{-1}(0.95) = 1.65$

α = soma das áreas a rosa

[Passo 3 = distribuição da v. fulcral + α + forma do H_1]

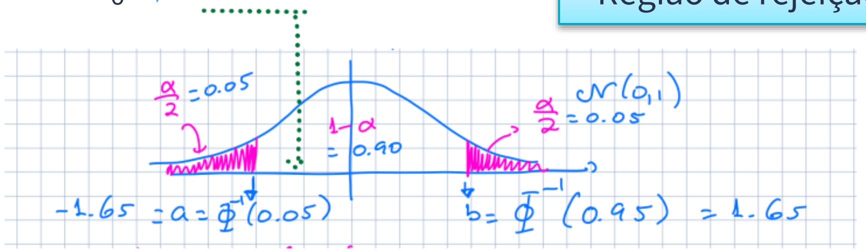
Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

Decisão (pela região de rejeição):

Passo 4 : Decisão sobre aceitação ou rejeição de H_0

$z_0 = -0.41$

Região de rejeição RR =]-∞; -1,65] U [1,65; +∞[



Decisão pela região de rejeição:
Não se rejeita H_0 para α = 10%, pois -1,65 < -0,41 < 1,65. Não existe evidência estatística para afirmar que o valor médio é diferente de 6 para α = 10%.

[Mariana: está bonita a aula de hoje? aguardo resposta!]

então, como $-1.65 < z_0 < 1.65$, significa que para 10% = 5% não há evidências estatísticas para rejeitar H_0

[Passo 4 = Região rejeição + t_0]

a) Sim (-1.645 < -0.408 < 1.645) **b)** Valor-p = 0.6818 > 0.1

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)

		decisão	
		Aceitar H_0	Rejeitar H_0
Realidade	H_0 V	O.K.	ERRO Tipo 1
	H_0 F	ERRO Tipo 2	O.K.

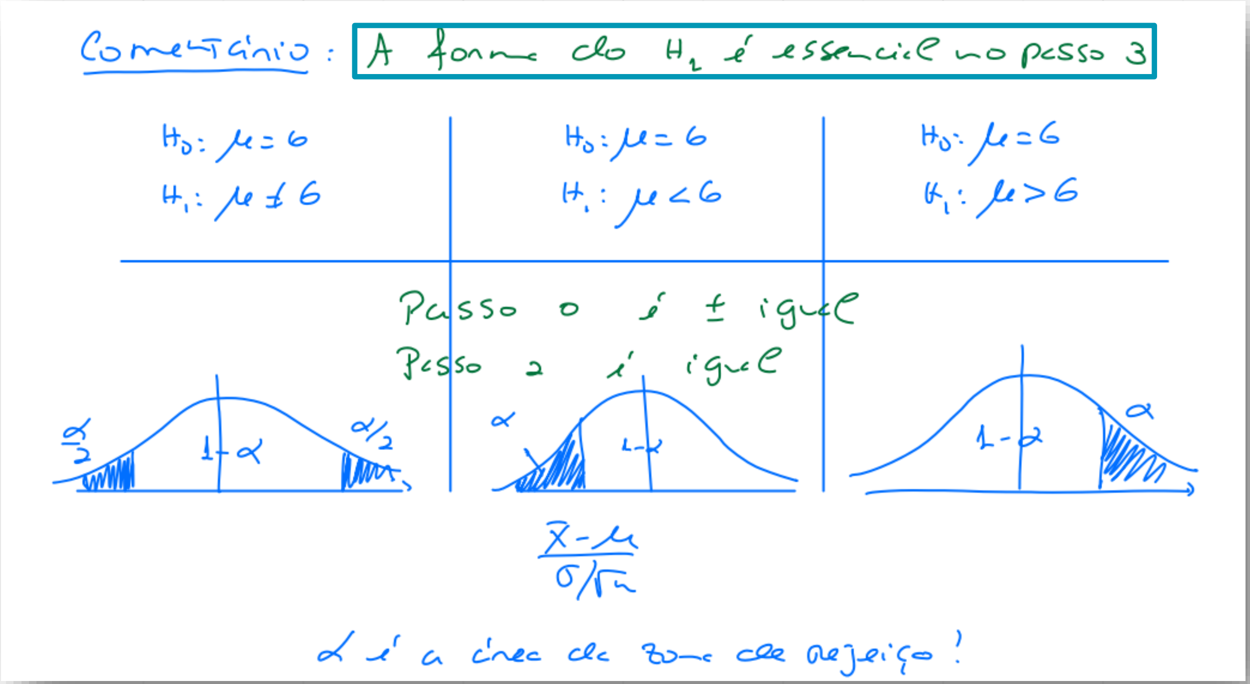
α = P(erro tipo 1) = P(Rejeitar H_0 | H_0 é verdadeira)
(nível de significância)

(por diversas razões, damos mais relevância ao erro tipo 1)

No exemplo: $\alpha = 0.10$

[Passo 1 = H_0 + H_1 + α]

Exercício 8.4 (a): Teste de Hipóteses para μ (σ^2 Conhecida)



Slides Professora Claúdia Nunes

Exercício 8.4 (a): Teste t para o Valor Médio (σ^2 Conhecida)

Nota: A variável média amostral tem distribuição normal, logo este teste de hipóteses é válido.

Teste Bilateral

Hipóteses

$H_0: \mu = 6$ *versus* $H_1: \mu \neq 6$

Dados:

N = 6

Média amostral = 5,917

$\sigma^2 = 0{,}25$

$\mu_0 = 6$

$\alpha = 0{,}10$

$z_{1-\alpha/2} = z_{0,95} = 1{,}645$

Estatística de Teste

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Valor Observado da Estatística de Teste (VOE)

$z_0 = -0{,}41$

Regra: $z_0 \in RR \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Decisão

Pela região de rejeição: $z_0 = -0{,}41$ não pertence à região de rejeição RR =]-∞; -1,645] U [1,645; +∞[

Pelo valor-p: Valor-p = 0,6818 > 0,10 (ver slide a seguir)

Regra: Valor-p < $\alpha \Rightarrow$ Rejeita-se H_0

Não se rejeita-se H_0 para α = 10%. Não existe evidência estatística para afirmar que a percentagem esperada de nitrogénio é diferente de 6% para α = 10%.

$RR =]-\infty; -z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}; +\infty[$

Cálculo do Quantil da Distribuição Normal de Probabilidade 1-α/2

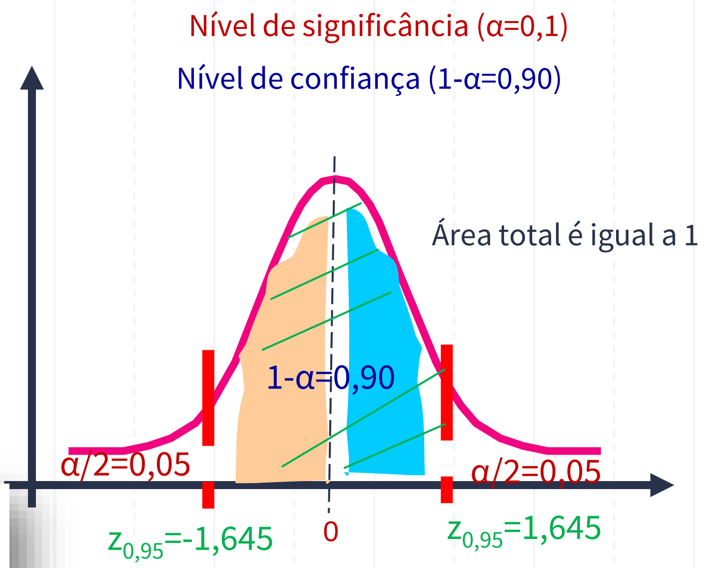


TABELA 5 – DISTRIBUIÇÃO NORMAL: $\Phi^{-1}(z)$

ε	.0005	.0010	.0050	.0100	.0200	.0250	.0500	.1000	.2000	.3000	.4000
z_ε	3.290	3.090	2.576	2.326	2.054	1.960	1.645	1.282	.842	.524	.253
$z_{\varepsilon/2}$	3.481	3.290	2.807	2.576	2.326	2.241	1.960	1.645	1.282	1.036	.842

$z_\varepsilon : P(Z > z_\varepsilon) = \varepsilon; \quad z_{\varepsilon/2} : P(|Z| > z_{\varepsilon/2}) = \varepsilon.$

O nível de significância é igual a $\alpha = 0,10$, então tem-se $z_{1-\alpha/2} = z_{0,95} = 1,645$

Teste bilateral: valor-p = $P(Z \leq -z_0 \text{ ou } Z \geq z_0) = P(Z \leq -z_0) + P(Z \geq z_0) = 2 \times P(Z \geq |z_0|)$

Exercício 8.4 (b): Valor-p quando a Estatística de Teste tem Distribuição Normal Padrão

Área total é igual a 1

Decisão (pelo p-value):

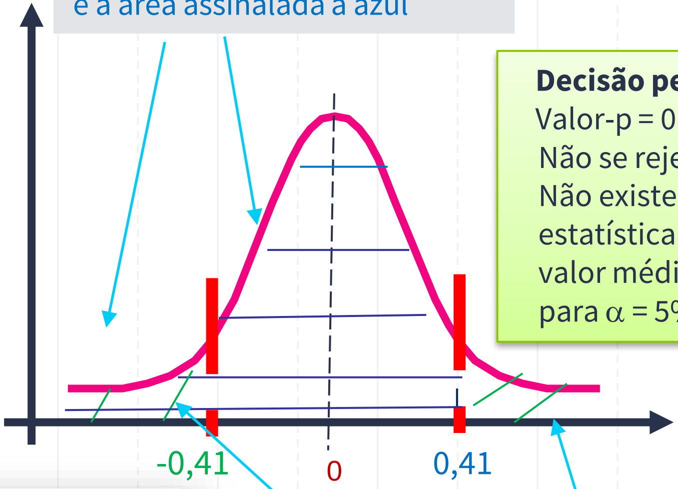
valor-p = $P(Z \leq -0{,}41 \text{ ou } Z \geq 0{,}41)$
$= 2 \times P(Z \geq 0{,}41) = 2 \times [1 - P(Z < 0{,}41)]$

A tabela geral só permite obter probabilidades de quantis positivos e do tipo $P(Z \leq z)$.

Então, tem-se
$P(Z \leq 0{,}41) = 0{,}6591$, logo

valor-p = $2 \times [1 - P(Z \leq 0{,}41)] \sim 2 \times [1 - 0{,}6591] = 0{,}6818$

$P(Z \leq 0{,}41) = 0{,}6591$
é a área assinalada a azul



Decisão pelo valor-p:
Valor-p = 0,6818 > 0,10
Não se rejeita H_0 para $\alpha = 10\%$.
Não existe evidência estatística para afirmar que o valor médio é diferente de 6 para $\alpha = 5\%$.

$P(Z \leq -0{,}41) = 1 - P(Z \leq 0{,}41) = P(Z \geq 0{,}41) = 0{,}3409$
é a área assinalada a verde

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879

a) Sim (-1.645 < -0.408 < 1.645) **b)** Valor-p = 0.6818 > 0.1

Obrigada!

Questões?